TD n°2 : Algèbre I -CORRIGÉ-

SMP (S1) - Licence I - 2022/2023

Pr. Hamza El Mahjour

Espaces affines et géométrie euclidienne

Exercice 1

Soit A le point de coordonnées $(1,1)$ dans la base $\mathscr{R} = (O,\mathscr{B})$ où $\mathscr{B}$ est la base canonique $\mathscr{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ du plan $\mathbb{R}^2$. Et soit $\mathscr{B}' = \{(1,1);(-1,1)\}$ une famille et $\mathscr{R}' = (O,\mathscr{B}')$ un autre repère.

- Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base.
- Trouver les matrices de changement de coordonnées de $\mathscr{R}$ à $\mathscr{R}'$ et l'inverse.
- Donnez les coordonnées de A dans la base $\mathscr{B}'$.

On rappelle que

$$P = \begin{array}{ccc} & \downarrow b'_1 & \downarrow b'_2 \\ \rightarrow e_1 & a_{11} & a_{12} \\ \rightarrow e_2 & a_{21} & a_{22} \end{array}$$

Correction ▼ [01]

Exercice 2

On considère les 4 points A, B, C, D donnés. $(A,\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD})$ définit-il bien un nouveau repère ? Dans ce cas, trouver les formules de changements de repère exprimant les coordonnées (x,y,z) dans $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ en fonction de celles (x',y',z') dans $(A,\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD})$.

1. $A(2,-1,0)$, $B(7,-1,-1)$, $C(-3,0,-2)$, $D(3,-6,-3)$
2. $A(4,1,4)$, $B(7,3,1)$, $C(9,0,0)$, $D(5,2,3)$
3. $A(0,-1,3)$, $B(5,-6,4)$, $C(-4,1,-2)$, $D(-3,3,6)$

Correction ▼ [02]

Exercice 3

Montrer que la famille $\mathscr{F} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées respectives des vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ dans le repère $\mathscr{R} = (O,\mathscr{F})$.

Correction ▼ [03]

Exercice 4

Soient les vecteurs $\mathscr{B} = \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$.

1. Montrer (sans calculer le déterminant) que $\mathscr{B}$ est une base.
2. Montrer, en calculant le déterminant, le même résultat précédent.
3. Trouver les coordonnées de $w = (1,1,1)$ dans la base $\mathscr{B}$.

Correction ▼ [04]

Exercice 5

Dans $\mathscr{E}_3$ muni d'un repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ on donne $A : (1,-1,1)$ et $D : \begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 2x + y - 3z = -1. \end{cases}$ Donner l'équation cartésienne du plan passant par A et D. [05]

Exercice 6 Coordonnées polaires,cylindriques et sphériques.

1. Placer le point de coordonnées cylindriques $(2, 2\pi/3, 1)$ et donner ses coordonnées cartésiennes.
2. Donner les coordonnées cylindriques du point de coordonnées cartésiennes $(3,-3,7)$
3. Le point $(2, \pi/3, \pi/4)$est donné en coordonnées sphériques. Placer le point sur un schéma et calculer ses cordonnées cartésiennes.
4. Le point $(0, 2\sqrt{3}, -2)$est donné en coordonnées cartésiennes. Caculer des coordonnées sphériques pour ce point.

[06]

Exercice 7

On note $M_{a,b} = \begin{pmatrix} 1+2a-b & 0 \\ 2-a-b & a-b \end{pmatrix}$ et $\mathscr{F} = \{M_{a,b} \mid (a,b) \in k^2\}$. Montrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de $\mathrm{M}_2(k)$.

[07]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2. Il suffit de montrer que $\mathscr{B}'$ libre. On calcule le déterminant : $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\times 1 - 1\times(-1) = 2 \neq 0$. Donc $\mathscr{B}'$ est libre donc c'est une base.

2. La matrice de changement du repère canonique $\mathscr{R}$ vers $\mathscr{R}'$ est facile car $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc $\mathscr{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour $\mathscr{P}_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$ c'est un peu différent : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1/2)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1/2)\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (1/2)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (1/2)\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc $\mathscr{P}_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

3. Les coordonnées de A dans $\mathscr{B}'$ sont : $X_{A'} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. $\vec{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{AC}\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{AD}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$. En effet :

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ -1 & -2 & -3 \\ 5 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -89 \neq 0.$$

2. $\vec{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{AC}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{AD}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. En effet :

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & -4 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

3. $\vec{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{AC}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{AD}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. En effet :

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -4 & -3 \\ -5 & 2 & 4 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -4 & -3 \\ -5 & 2 & 4 \\ 1 & -5 & -3 \\ 5 & -4 & -3 \\ -5 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 45 \neq 0.$$

On va travailler un exemple de la matrice de passage $\mathscr{P}_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$ pour les vecteurs de la question 1. Pour celà nous devons résoudre trois systèmes linéaires, le premier :

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par la règle de Cramer : $D = -89$ et $D_x = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -13$ et $D_y = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5$ et $D_z =$

$\begin{vmatrix} 5 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1$ Donc les solutions sont $\alpha = 13/89, \beta = -5/89$ et $\gamma = -1/89$. C'est ce qui va former la première colonne de notre matrice de passage.

$$\mathscr{P}_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 13/89 & \times & \times \\ -5/89 & \times & \times \\ -1/89 & \times & \times \end{pmatrix}$$

Donc on résout le deuxième système :

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par la même règle de Cramer : $D = -89$ et $D_x = \begin{vmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -17$ et $D_y = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -14$ et $D_z = \begin{vmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 15$. les solutions sont $\alpha = 17/89, \beta = 14/89$ et $\gamma = -15/89$. C'est ce qui va former la deuxième colonne de notre matrice de passage.

$$\mathscr{P}_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 13/89 & 17/89 & \times \\ -5/89 & 14/89 & \times \\ -1/89 & -15/89 & \times \end{pmatrix}$$

Pour la 3ème colonne on refait les mêmes étapes avec le deuxième membre du système cette fois-ci $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Et on obtiendra $\alpha = -24/89, \beta = -25/89$ et $\gamma = -5/89$. Finalement la matrice de passage est

$$\mathscr{P}_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 13/89 & 17/89 & -24/89 \\ -5/89 & 14/89 & -25/89 \\ -1/89 & -15/89 & -5/89 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 3 ▲

Pour montrer que la famille forme une base, puisque $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ et cette famille est composée de trois vecteurs, il suffirait de montrer qu'elle est libre. On calcule le déterminant et on trouve $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ donc libre . Maintenant comme dans l'exercice 2 nous allons obtenir la matrice de passage vers la base canonique suivante :

$$\mathscr{P}_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées des points demandés dans la nouvelle base sont $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Supposons que les éléments de cette famille sont liées. Puisqu'il n'existe pas de colinéarité entre les vecteurs deux à deux alors, si on suppose que c'est une famille liée il existerait α et β réels tels que

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases}\alpha+\beta &= 0\\ \beta &= 1\\ \alpha &= 1\end{cases} \Longrightarrow 0 = 1+1 = 2 \text{ (contradiction)}$$

Donc c'est bien un famille libre (donc c'est une base car nous sommes en dimension 3 et il y a trois vecteurs libres donc ils forment une base).

2. En calculant le déterminant on trouve :

$$\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Donc libre. Maintenant comme dans l'exercice 3, nous allons résoudre trois systèmes linéaires :

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \;et\; \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \;et\; \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

On obtient par la règle de Cramer les solutions pour construire la matrice de passage suivante :

$$\mathscr{P}_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}} = \begin{pmatrix}-1/2 & 1/2 & 1/2\\1/2 & -1/2 & 1/2\\1/2 & 1/2 & -1/2\end{pmatrix}$$

Les coordonnées de w dans la nouvelle base sont : $w' = \mathscr{P}_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}} \cdot w = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$