TD n°1 : Algèbre II

SMI/SMA - S1 - 2021/2022 - Pr. Hamza El Mahjour

Théorie des ensembles, groupes, anneaux et corps

Exercice 1

Pour l'ensemble donné et les relations ci-dessous, déterminez lesquelles définissent des relations d'équivalence.

(a) S est l'ensemble des droites du plan affine $(D) \sim (\Delta)$ si $(D) \perp (\Delta)$.

(b) S est l'ensemble des nombres réels, $a \sim b$ si $a = \pm b$.

(c) S est l'ensemble des entiers relatifs, $a \sim b$ si $a - b \geqslant 0$.

(d) S est $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(a,b) \sim (a',b')$ si $a + b' = a' + b$.

Correction ▼ [01]

Exercice 2

Soit $* : E \times E \longrightarrow E$, tel que $x * y = x$ pour tout $(x,y) \in E \times E$.

1. Montrer que la loi $*$ est associative.
2. Est-ce que $*$ est commutative.

Correction ▼ [02]

Exercice 3

Soit G un ensemble non-vide muni d'un loi de composition interne $*$ associative qui vérifie de plus les assertions suivantes :

- $\exists \in G, \forall x \in G, \quad x * e = x.$
- $\forall x \in G, \exists y_x \in G$ tel que $x * y_x = e$.

Montrer que $(G, *)$ est un groupe. []

Exercice 4

On considère le groupe des permutations $\mathfrak{S}_5$. Soit $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

1. Calculer σ_1^2 et en déduire σ_1^{-1}.
2. Donner les orbites $\mathscr{O}_{\sigma_2,5}$ et $\mathscr{O}_{\sigma_3,4}$.
3. Comment appelle-t-on σ_2 et σ_3 ? Représentez-les autrement.
4. Quelle est la relation entre σ_1, σ_2 et σ_3.

□

Exercice 5

Montrer que deux éléments a et b d'un groupe $(G,\cdot)$ commutent si et seulement si $a\cdot b\cdot a^{-1}=b$. □

Exercice 6

Dans un groupe fini d'ordre pair (c'est à dire le nombres d'éléments est $2n$), montrer qu'il existe un élément, distinct de l'élément neutre, qui est son propre inverse. □

Exercice 7

Soit $(\mathbb{A},+,\times)$ un anneau non commutatif et soit a,b,c et d des éléments de $\mathbb{A}$.

1. Calculer $(a+b)\times(c+d)$.
2. En déduire $(a+b)^2$. Quelle condition doit vérifier la loi $\times$ pour obtenir l'identité remarquable usuelle.

□

Exercice 8

Soit I un idéal d'un anneau $(\mathbb{A},+,\times)$. Prouver que si $\mathbb{1}_{\mathbb{A}}\in I$ alors $I=\mathbb{A}$. □

Correction de l'exercice 1 ▲

(a) n'est pas une relation d'équivalence car elle n'est pas réflexive car une droite n'est pas perpendiculaire sur elle même. (c) n'est pas une relation d'équivalence car elle n'est pas symétrique par exemple $5-2 \geqslant 0$ mais $2-5<0$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1) On veut montrer que $(x*y)*z = x*(y*z)$. En appliquant la définition $x*(y*z) = x$ et on a $(x*y)*z = (x*y) = x$. 2) * n'est pas commutatif car $x*y = x$ mais $y*x = y$, elle est commutative ssi E est composé d'un unique élément.

Correction de l'exercice 3 ▲

On sait que chaque élément est inversible à droite $(x*y_x = e)$, il faut prouver que cet inverse est aussi à gauche. On sait que $y_x = y_x * e$ donc $y_x*(x*y_x) = y_x$. Par associativité on a $(y_x*x)*y_x = y_x$. De plus, on sait qu'il existe z_y tel que $y_x*z_y = e$. En remplaçant, nous obtenons $(y_x*x)*y_x*z_y = y_x*z_y = e$. Par associativité encore, on peut écrire $y_x*(x*y_x)*z_y = e$ donc $y_x*x = e$. On sait que e vérifie $x*e = x$ pour tout x. On déjà établi que chaque élément x admet un inverse y_x donc $e*x = (x*y_x)*x = x*(y_x*x) = x*e = x$. Donc $e*x = x*e = x$. C'est à dire que e est un élément neutre. On conclut que $(G,*)$ est un groupe.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. On a $\sigma_1^2 = \sigma_1 \circ \sigma_1$. On trouve que $\sigma_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = Id_5$ donc $\sigma^{-1} = \sigma$.
2. $\mathscr{O}_{\sigma_2,5} = \{4,5\}$ et $\mathscr{O}_{\sigma_3,1} = \{1,3\}$.
3. On les appelle des cycles car il existe une seule orbite qui a plus d'un élément,$\sigma_2 = (4\ \ 5), \sigma_3 = (1\ \ 3)$.
4. En observant bien σ_1 on remarque que $\sigma_3 \circ \sigma_2 = (1\ \ 3) \circ (4\ \ 5) = \sigma_1$.

Correction de l'exercice 5 ▲

$\Leftarrow$) On a $a \cdot b = b \cdot a$. En multipliant par "a^{-1}" à droite des deux côtés on obtient $a \cdot b \cdot a^{-1} = b \cdot \underbrace{a \cdot a^{-1}}_{\mathbb{1}_G} = b$.

$\Rightarrow$) Si $a \cdot b \cdot a^{-1} = b$ alors en multipliant par "a" à droite des deux côtés on obtient $a \cdot b \cdot \underbrace{a^{-1} \cdot a}_{\mathbb{1}_G} = b \cdot a$ ce qui implique que $a \cdot b = b \cdot a$.

Correction de l'exercice 6 ▲

Par unicité de l'existence de l'inverse de chaque élément d'un groupe, on peut dire que les ensembles $\{x_i, x_i^{-1}\}$, $(i = 1 \dots k)$ forment une partition du groupe. Si on suppose que chacun de ces groupes contient deux éléments différents alors la totalité des éléments de cette famille est $2k$ si on ajouter l'unique élément neutre on aurait un total de $2k+1$ éléments (qui est un cardinal impair) or on a supposé que c'est un groupe fini de cardinal pair (contradiction). C'est à dire qu'il existe au moins un x_i tel que $x_i^{-1} = x_i$.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. On a

$$\begin{aligned} (a+b)\cdot(c+d) = &\quad (a+b)\cdot c + (a+b)\cdot d \quad \text{(distributivité à droite)} \\ = &\quad a\cdot c + b\cdot c + a\cdot d + b\cdot d \end{aligned}$$

2. En utilisant la première question on trouve :

$$(a+b)^2 = a\cdot a + b\cdot a + a\cdot b + b\cdot b = a^2 + b^2 + a\cdot b + b\cdot a.$$

Pour retrouver l'identité remarquable usuelle il faut que $a\cdot b = b\cdot a$.

Correction de l'exercice 8 ▲

Par définition d'un idéal on a

$$\forall i \in A, \forall a \in \mathbb{A}, \quad i \times a \in I.$$

En particulier, vu que $\mathbb{1}_{\mathbb{A}} \in \mathbb{A}$ alors $\forall a \in \mathbb{A}, \mathbb{1}_{\mathbb{A}} \times a = a \in I$. Donc $\mathbb{A} \subset I$ et on sait que $I \subset \mathbb{A}$ par conséquent $I = \mathbb{A}$.
