TD n°3 : Algèbre II

SMI/SMA - S1 - 2021/2022 - Pr. Hamza El Mahjour

Fractions rationnelles

Exercice 1

Décomposez en éléments simples de $\mathbb{R}(X)$ les fractions suivantes :

(a) $\dfrac{X^3-2X^2+1}{X^2+3X+2}$; (b) $\dfrac{3X-5}{X^3-1}$; (c) $\dfrac{X+3}{(X+1)(X^2+3)}$; (d) $\dfrac{3X-3}{X^4-2X^2+1}$.

[01]

Exercice 2

Décomposez en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ les fractions suivantes :

(a) $\dfrac{2X-1}{(X^2+1)(X+2i)}$; (b) $\dfrac{1}{X^3-1}$; (c) $\dfrac{3X^2}{(X-i)^2(X-\sqrt{2})}$.

Indication ▼ [02]

Exercice 3

Déterminer si les fractions rationnelles suivantes sont irréductibles ou non dans $\mathbb{R}(X)$.

(a) $\dfrac{X^5-3X^4-X^3+3X^2}{X^3-6X^2+11X-6}$; (b) $\dfrac{X^3-2}{X^2+1}$; (c) $\dfrac{X^2+(1-\sqrt{2})X-\sqrt{2}}{X^2-(\sqrt{2}-\sqrt{3})-\sqrt{6}}$; (d) $\dfrac{1}{X^5-1}$.

Indication ▼ [03]

Exercice 4

1. Répondez par "**vrai**" ou "**faux**" aux questions suivantes :

La fraction $\dfrac{(X-1)^2}{(X-1)}$ est irréductible	
$\lambda=2$ est un pôle de la fraction $\dfrac{(X-1)(X-2)}{(X-2)(X+1)}$	
$\lambda=1$ est un pôle de multiplicité 3 de la fraction $\dfrac{(X-1)}{(X-1)^3}$	
$\lambda=1$ est un pôle de multiplicité 2 de la fraction $\dfrac{(X-1)}{(X-1)^3}$	
$\lambda=1$ est un pôle de multiplicité 1 de la fraction $\dfrac{(X-1)}{(X-1)^3}$	
$\lambda=i$ n'est pas un pôle de la fraction $\dfrac{X-i}{X^2+1}$ dans $\mathbb{C}(X)$	

2. En utilisant les dérivées successives du dénominateur, étudiez la multiplicité des pôles de chacune des fractions suivantes

   (a) $\dfrac{X^2-3X+10}{18-3X-4X^2+X^3}$; $\quad$ (pôle $\lambda = 3$)

   (b) $\dfrac{1}{X^5+13X^4+46X^3-10X^2-175X+125}$; $\quad$ (pôle $\lambda = -5$)

   (c) $\dfrac{X-i}{X^5-3\sqrt{2}X^4+2X^4+(7-6\sqrt{2})X^3+(12-5\sqrt{2})X^2+(6-4\sqrt{2})X-2\sqrt{2}}$; $\quad$ (pôle $\lambda = \sqrt{2}$)

Indication ▼ [04]

Exercice 5

Effectuer la division suivant les puissances croissantes de :

- $A(X) = X^6+1$ par $B(X) = X^4+X^2+1$ (d'ordre 3)
- $P(X) = 4X^3-2X^2+2X+1$ par $Q(X) = 9X^3+3X+1$ (d'ordre 3)

Indication ▼ [05]

Indication pour l'exercice 2 ▲

N'oubliez pas que les seuls polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ sont ceux de degré 1.

Indication pour l'exercice 3 ▲

- Pensez à des racines communes entre le numérateur et le dénominateur
- Pensez à l'algorithme d'Euclide du PGCD
- Pensez aux racines n-ièmes de l'unité

Indication pour l'exercice 4 ▲

- Le pôle concerne la fraction irréductible (souvenez-vous !)
- Dérivez et évaluez !

Indication pour l'exercice 5 ▲

La division suivant les puissances croissantes s'arrête si la valuation du reste est supérieur à l'ordre demandé.