TD n°2 : Algèbre II

SMI/SMA - S1 - 2021/2022 - Pr. Hamza El Mahjour

Polynômes de $\mathbb{K}[X]$

Exercice 1

Soit $\mathbb{K}$ un corps et a et b dans $\mathbb{K}$ tels que $q \neq b$. Calculer le reste de la division euclidienne d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ par $(X-a)(X-b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.

Correction ▼ [01]

Exercice 2

Trouver un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que

$$P(1) = 3, P'(1) = 4, P^{(2)}(1) = 5,$$

et pour tout $n \geqslant 3$, $P^{(n)}(1) = 0$.

Correction ▼ [02]

Exercice 3

Cherchez un polynôme P de degré 3 tel que

$$P(0) = 1, P(1) = 0, P(-1) = -2, P(2) = 4.$$

sachant que le coefficient dominant de P est $a_3 = \dfrac{3}{2}$.

Correction ▼ [03]

Exercice 4

Effectuer les division euclidiennes de

1. $3X^5 + 4X^2 + 1$ par $X^2 + 2X + 3$
2. $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^3 + X + 2$
3. $X^4 - X^3 + X - 2$ par $X^2 - 2X + 4$

Correction ▼ [04]

Exercice 5

Donner une factorisation irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ des polynômes

1. $P(X) = X^6 + 1$,
2. $Q(X) = X^8 + X^4 + 1$.

Correction ▼ [05]

Exercice 6

Résoudre les équations suivantes, où l'inconnue est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$

1. $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$,
2. $(P')^2 = 4P$,
3. $P \circ P = P$.

Correction ▼ [06]

Exercice 7

Soient $A, B, P \in \mathbb{K}[X]$ avec P non-constant. On suppose que $A \circ P$ divise $B \circ P$. Démontrer que $A|B$.
[07]

Correction de l'exercice 1 ▲

La division euclidienne par un polynôme de degré 2 donne un reste de degré 1. Posons $P(X) = (X-a)(X-b)Q(X) + \alpha X + \beta$. Évaluons P en a et ensuite en b. $P(a) = 0 \cdot Q(a) + \alpha a + \beta = \alpha a + \beta$ et $P(b) = 0 \cdot Q(b) + \alpha b + \beta = \alpha b + \beta$. Ce qui peut écrit sous la forme du système suivant

$$\begin{cases} P(a) &= \alpha a + \beta, \\ P(b) &= \alpha b + \beta. \end{cases}$$

Par un simple calcul on trouve $\alpha = \dfrac{P(a) - P(b)}{a-b}$ et $\beta = \dfrac{aP(a) - bP(b)}{a-b}$.

Correction de l'exercice 2 ▲

On constate d'abord que ce polynôme est de degré 2 car sa dérivée devient toujours nule à partir de la troisième dérivation. Selon la formule de Taylor pour les polynômes, on sait que

$$\begin{aligned} P(X) &= P(1) + \frac{P'(1)}{1!}(X-1) + \frac{P^{(2)}(1)}{2!}(X-1)^2 && (1) \\ &= 3 + 4(X-1) + \frac{5}{2}(X-1)^2 && (2) \\ &= 3 + 4X - 4 + \frac{5}{2}X^2 + \frac{5}{2} - 5X && (3) \\ P(X) &= \frac{5}{2}X^2 - X + \frac{3}{2}. && (4) \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3 ▲

Le polynôme P est de degré 3 avec un coefficient dominant $\dfrac{3}{2}$

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \frac{3}{2}X^3.$$

On a $P(0) = 1$ donc $a_0 = 1$ et $P(1) = 0$ donc $a_0 + a_1 + a_2 + \frac{3}{2} = 0$. Aussi, $P(-1) = -2 = a_0 - a_1 + a_2 - \frac{3}{2}$. Finalement, $P(2) = 4$ alors $a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 12 = 4$. On obtient le système

$$\begin{cases} a_0 & +a_1 & +a_2 & = & -\frac{3}{2} \\ a_0 & -a_1 & +a_2 & = & -\frac{1}{2} \\ a_0 & +2a_1 & +4a_2 & = & -8 \\ a_0 & & & = & +1 \end{cases}$$

Sachant que $a_0 = 1$, le système devient

$$\begin{cases} (L1) & a_1 & +a_2 & = & -\frac{5}{2} \\ (L2) & -a_1 & +a_2 & = & -\frac{3}{2} \\ (L3) & 2a_1 & +4a_2 & = & -9 \end{cases}$$

En aditionnant $(L1)$ et $(L2)$ on obtient $a_2 = -2$ en remplaçant par la valeur de a_2 dans $(L1)$,$(L2)$ et $(L3)$, on retrouve toujours la même valeur pour a_1 qui est $a_1 = -\frac{1}{2}$. Donc

$$P(X) = \underbrace{1}_{a_0} \underbrace{-\frac{1}{2}}_{a_1} X \underbrace{-2}_{a_2} X^2 + \underbrace{\frac{3}{2}}_{a_3} X^3.$$

Correction de l'exercice 4 ▲

1. $3X^5+4X^2+1=(X^2+2X+3)\cdot\underbrace{(3X^3-6X^2+3X+16)}_{\text{quotient}}+\underbrace{(-41X-47)}_{\text{Reste}}$
2. $3X^5+2X^4-X^2+1=(X^3+X+2)\cdot\underbrace{(3X^2+2X-3)}_{\text{quotient}}+\underbrace{(-9X^2-X+7)}_{\text{Reste}}$
3. $X^4-X^3-X-2=(X^2-2X+4)\cdot\underbrace{(X^2+X-2)}_{\text{quotient}}+\underbrace{(6-9X)}_{\text{Reste}}$

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Les racines de $X^6+1=0$ dans $\mathbb{C}$ sont $\omega_k=e^{i\frac{(2k+1)\pi}{6}}$, $k=1,2,\dots 5$. Donc

$$\begin{aligned} P(X) &= \Pi_{k=0}^{5}(X-e^{i\frac{(2k+1)\pi}{6}}) && (5)\\ &= (X-e^{i\pi/6})(X-e^{-i\pi/6})(X-i)(X+i)(X-e^{i5\pi/6})(X-e^{-i\pi/6}) && (6)\end{aligned}$$

   On a veillé à placer dans l'écriture précédente à placer successivement les racines conjuguées pour retrouver la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$. On obtient alors

$$P(X)=(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+1)(X^2+\sqrt{3}X+1).$$

2. Pour résoudre cette question on a besoin de faire un changement de "variable". On pose $x=X^4$ donc $x^2=X^8$. Cherchons les racines alors du polynômes x^2+x+1 au lieu de X^8+X^4+1.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Le polynôme nul est évidemment solution. $\deg(P(X^2))=2\deg P=\deg(X^2+1)\cdot\deg P=2+\deg P$, donc $\deg P=2$. Posons $P(X)=aX^2+bX+c$, alors

$$\begin{aligned} P(X^2) &= (X^2+1)P(X)\\ aX^4+bX^2+c &= aX^4+bX^3+(a+c)X^2+bX+c.\end{aligned}$$

   Ce qui implique que $b=0$. On en déduit ensuite que $a+c=0$. Les solutions sont donc les polynômes de la forme $P(X)=a(X^2-1)$.

2. On trouve par la même méthode précédente que $\deg P=2$. Donc, $P(X)=aX^2+bX+c$ et $P'(X)=2aX+b$.

$$\begin{aligned} (P')^2 &= 4P\\ (2aX+b)^2 &= 4aX^2+4bX+c\\ 4a^2X^2+4abX+b^2 &= 4aX^2+4bX+4c.\end{aligned}$$

   Par égalité des coefficients on trouve $a^2=a$ donc $a=0$ ou $a=1$. Mais puisque $\deg P=2$ alors forcément $a=1$ et le cas nul est exclu. Puis $c=\frac{b^2}{4}$. Alors, $P(X)=X^2+bX+\frac{b^2}{4}$.

3. Posons $\deg P=n$ et $\deg(X^n)^n=\deg X^{n^2}=n^2$. Alors $\deg(P\circ P)=\deg P\implies n^2=n\implies n=0$ ou $n=1$. On a $a(aX+b)+b=a^2X+b(a+1)=aX+b$. On a par conséquent $a^2=a$ soit $a=1$ ou $a=0$ et $ab=0$. Si $a=1$ alors $b=0$ et si $a=0$, alors b peut être quelconque. Les polynômes constants et $P(X)=X$.
