TD n°2 : Algèbre I

Informatique Appliquée - S1 - 2023/2024 - Pr. El Mahjour

Ensembles et Applications

Exercice 1

Montrer par contraposition les assertions suivantes, E étant un ensemble :

1. $\forall A,B \in \mathscr{P}(E) \quad (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$,
2. $\forall A,B,C \in \mathscr{P}(E) \quad (A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$.

[01]

Exercice 2

Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$. Démontrer que :

- $\forall A,B \in \mathscr{P}(E) \quad (A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$,
- $\forall A,B \in \mathscr{P}(E) \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,
- $\forall A,B \in \mathscr{P}(E) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
- $\forall A,B \in \mathscr{P}(F) \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
- $\forall A \in \mathscr{P}(F) \quad f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.
- $\forall A,B \in \mathscr{P}(F) \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

[02]

Exercice 3

Montrer que chacun des ensembles suivants est un intervalle, éventuellement vide ou réduit à un point :

(i) $I_1 = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[3, 3 + \frac{1}{n^2}\right[$

(ii) $I_2 = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]-2 - \frac{1}{n}, 4 + n^2\right]$.

(iii) $I_3 = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right[$

(iv) $I_4 = \displaystyle\bigcup_{n=2}^{+\infty} \left[1 + \frac{1}{n}, n\right]$

[03]

Exercice 4 *** Théorème de CANTOR

1. Montrer qu'il existe une injection de E dans $\mathscr{P}(E)$.
2. En considérant la partie $A = \{x \in E / \ x \notin f(x)\}$, montrer qu'il n'existe pas de bijection f de E sur $\mathscr{P}(E)$.

[04]

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x/(1+x^2)$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1,1] \to [-1,1]$ $g(x) = f(x)$ est une bijection.
4. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de f.

[05]

Exercice 6 *

Montrer que : ($g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective) et ($g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective). [06]

Exercice 7

Dans $\mathbb{C}$ on définit la relation $\mathscr{R}$ par :

$$z \mathscr{R} z' \Leftrightarrow |z| = |z'|.$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de chaque $z \in \mathbb{C}$.

Indication ▼ [07]

Indication pour l'exercice 7 ▲

Un dessin vous sera utile